

21/09

A che serve il corso di Analisi 1?

① Nozioni base di analisi

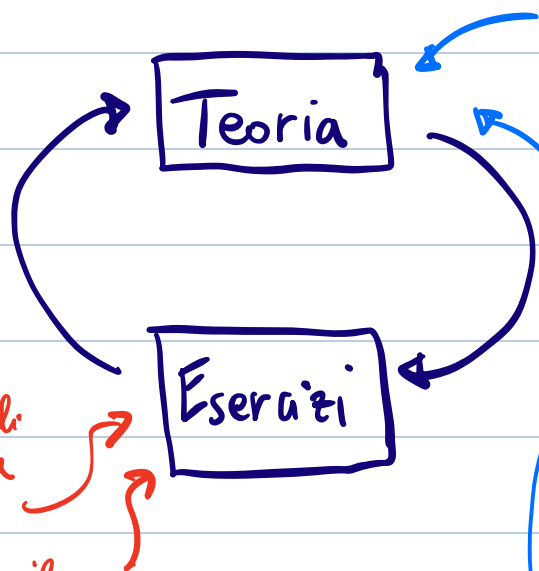
② Ragionamento logico-deduttivo

Metodo di studio:

- Lezioni frontali
- Studio a casa delle lezioni
- Esercizi

Difficoltà giusta:
non troppo facili
non troppo difficili
Parlare e individuare
le difficoltà.

Lasciare riposare il
problema, non affrettarsi
a trovare la soluzione.



Concetti: so fare
degli esempi di questi
concetti/definizioni?

Teoremi/proposizioni:
capisco perché il dato
teorema necessita delle
date ipotesi?

È ancora vero se
rimuovo le ipotesi?
Perché? Perché no?
Come lo applico?

Parlarne: discutere
con le altre persone
di cosa è giusto e
cosa no.

- Teoria degli insiemi
- Logica

Teoria degli insiemi

Definizione: un insieme è una collezione di oggetti

Esempi:

- $A = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$
 $= \{2, 1, 3\}$
- $A = \{5, \text{sasso}, \text{😊}\}$

} finiti

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$
- $A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{2}, \dots\}$

} infinito

Possiamo definire gli insiemi tramite una proprietà

$$A = \{a \mid a \text{ verifica la proprietà } P\}$$

tutti gli
oggetti a

tali che

Esempi:

$$\begin{aligned} \cdot A &= \{n \mid n \text{ è un numero naturale}\} \\ &= \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

$$\cdot A = \{r \mid r \text{ è un numero razionale}\}$$

$$\cdot A = \{x \mid x \text{ è una città in Giappone}\}$$

Concetti fondamentali per parlare di insiemi:

$$- x \in A$$

x appartiene ad A

$$- x \notin A$$

x non appartiene ad A

$$- A \subseteq B$$

l'insieme A è contenuto
nell'insieme B

$$- A \subsetneq B$$

l'insieme A è contenuto
nell'insieme B e non è
uguale a B .

$$- A \not\subseteq B$$

l'insieme A non è contenuto
nell'insieme B

Esempi: • $A = \{1, 2, \text{Tokyo}\}$ $B = \mathbb{N}$

l'insieme dei
numeri
naturali

$$A \not\subseteq B$$

primo
esempio
di dimostraz.

Ne parleremo
meglio dopo

Facciamo vedere che esiste un elemento di A che non è contenuto in B :
in particolare, "Tokyo" $\notin \mathbb{N}$.

$$\bullet A = \{x \mid x \text{ città in Giappone}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ città in Asia}\}$$

$$\text{Allora } A \subsetneq B$$

Facciamo vedere che ogni elemento di A

è in B ma non ogni elemento di B è in A (ovvero, esiste un elemento di B che non è in A). $\exists$

Poiché il Giappone è in Asia, ogni città del Giappone è anche in Asia.

Pechino è una città dell'Asia che non è in Giappone.

Operazioni fra insiemi:

$$A \cup B$$

$$A \text{ unito } B$$

$$\{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

$$A \cap B$$

A intersezione B

$$\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$\text{Se } A \subset B, \quad B \setminus A$$

Complementare di A in B

$$\{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

$$A \times B$$

Prodotto cartesiano di A e B , o A per B

$$\{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Copie ordinate

$$\emptyset$$

insieme vuoto

$$\{\}$$

Esempi: $A = \{1, 2\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ e' pari}\}$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$= \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e (e' pari oppure e' 1)}\}$$

$$\cdot A = \{1, 5\}, B = \{5, 7, \emptyset\}$$

$$A \cap B = \{5\}$$

Proposizione: Per ogni insieme A , $\emptyset \subset A$

Dimostrazione: $\emptyset \subset A \iff$ ogni elemento dell'insieme vuoto e' anche un elemento di A

Questa affermazione e' vera perche', sostanzialmente, non c'e' niente da verificare $\square$

- $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z}$ insieme dei numeri interi
- $\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali
- $\mathbb{C}$ insieme dei numeri complessi

Esercizi

$$\cdot (A \cup B) \cap C$$

- $(A \cap B) \cup C$
- $A \cup \emptyset$
- $A \cap \emptyset$

Ossezzazione

Per dimostrare che due insiemi A e B sono uguali si dimostra

$$(1) \quad A \subset B$$

$$(2) \quad B \subset A$$

Logica formale

Le proposizioni possono essere valide o non valide e, quando valide, vere oppure false.

- $5 \in \mathbb{Q}$ è una proposizione **valida**
- $x \in \mathbb{Q}$ è una proposizione **non valida** perché ho introdotto una variabile non quantificata.
È non valida perché non posso verificare se è vera o falsa, non

essendo chiaro "dove prendo" x .

- Per ogni $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$ è una proposizione **valida**
(posso verificare se è vera o meno)

- Per ogni $x \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{N}$ è una proposizione **valida**
(ma falsa)

Notazione: $\forall x$ per ogni x
 $\exists x$ esiste x

$\nexists x$, $\neg \forall x$ non per ogni x
 $\nexists x$, $\neg \exists x$ non esiste x

Questi sono quantificatori, quantificano delle variabili.

Altra notazione: se P e Q sono due proposizioni
possiamo formare una nuova proposizione

$P \wedge Q$

$P \vee Q$

$P \text{ e } Q$

$P \text{ o } Q$

Questi sono connettori e operatori logici:

✓ Disclaimer: qui sono io, Andrea Di Lorenzo, a parlare

P = mi chiamo Andrea

✓

Q = il mio cognome è Conti

F

$P \wedge Q$ = mi chiamo Andrea e il mio cognome è Conti

F

$P \vee Q$ = mi chiamo Andrea o il mio cognome è Conti

✓

P = Roma è in Italia

✓

Q = Parigi è in Francia

✓

$P \wedge Q$ è ancora vera.

$P \vee Q$ è ancora vera.

P = Roma è in Francia

Q = Parigi è in Italia

$P \wedge Q$ è falsa

$P \vee Q$ è falsa

Sintetizziamo tutto ciò nelle tavole di verità

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

P	$\neg P$
V	F
F	V

Negazione

P = piove

$\neg P$ = non piove

Notazione: $\boxed{P} \Rightarrow \boxed{Q}$

ipotesi (green arrow pointing to $\boxed{P}$)

tesi (pink arrow pointing to $\boxed{Q}$)

P implica Q
oppure
se P allora Q

Esempio: P = piove Q = porto l'ombrello
 $P \Rightarrow Q$: se piove allora porto l'ombrello

Esempio: se Andrea è alto 1 metro e 90

allora ci sono un numero finito di numeri naturali.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
F	V	V
F	F	V
V	F	F

Notazione: $P \Leftrightarrow Q$ se P allora Q e
se Q allora P

Esempio: P = c'è il sole
Q = porto l'ombrello

$P \Leftrightarrow Q$ è falsa, perché uno può portare l'ombrello anche se c'è il sole

P = sono a Tokyo
Q = sono in Giappone

$P \Rightarrow Q$ è vera

$P \Leftrightarrow Q$ è falsa in quanto Q
può essere vera ma P può
essere falsa.

Le proposizioni possono avere delle variabili
(che vanno quantificate)

$\forall x \in \mathbb{N}, 2x \text{ è pari}$

↑
quantificatore

↑
variabile

↑
proposizione $P(x)$
dipendente dalla variabile.

In base ai quantificatori usati, una proposizione
può essere vera o meno

$P(x) = x + 3$ è un numero primo

→ $\forall x \in \mathbb{N}, x + 3 \text{ è primo}$ (falsa)

→ $\exists x \in \mathbb{N}, x + 3 \text{ è primo}$ (vera)

Come si negano le proposizioni con quantificatori:

$$\neg (\forall x, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x, \neg P(x))$$

$$\neg (\exists x, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \neg P(x))$$

Esercizio: • usare queste proprietà per verificare

$$\neg (\neg (\forall x, P(x))) \Leftrightarrow \forall x, P(x)$$

- Costruire le tabelle di verità di
 $(P \wedge Q) \vee R$, $(P \vee Q) \wedge R$

Osservare il parallelo con gli esercizi sugli insiemi

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

↑
proposizione
contronominale