

22/09

- Come si dimostrano le proposizioni / teoremi / etc.

proprietà distributiva

Esercizio

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Dimostrazione diretta

Dobbiamo dimostrare un'uguaglianza di insiemi

Facciamo così:

Step 1: $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Dobbiamo far vedere che

qui uso la definizione di " $\subset$ " $\rightarrow \forall x \in (A \cup B) \cap C, x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Equivalentemente:

se $x \in (A \cup B) \cap C$, allora $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

ipotesi $\rightarrow$



$x \in A \cap C$

$x \in (A \cap C)$



$x \in (B \cap C)$

$(x \in A \text{ e } x \in C)$

oppure

$(x \in B \text{ e } x \in C)$

$x \in A \cup B$

e

$x \in C$

sto usando la def. di $\cap$



$x \in B \cap C$

def. di $\cup$ $\rightarrow (x \in A \text{ oppure } x \in B) \text{ e inoltre } x \in C$

Step 2: $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$

Dobbiamo dimostrare che

se $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ allora $x \in (A \cup B) \cap C$

$x \in A \cap C$ $\vee$ $x \in B \cap C$ $\Rightarrow$ $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in C)$
 $\Downarrow$ $(x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$(x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)$ $\Rightarrow$ $x \in (A \cup B) \cap C$ $\square$

- Siano P e Q proposizioni. Dimostrare che

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

A

B

Dimostrazione: vogliamo dimostrare che $A \Leftrightarrow B$.

Cosa vuol dire? Vuol dire dimostrare che

ogni volta che A è vera, anche B è vera

e ogni volta che A è falsa anche B è falsa

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Dimostrazione per assurdo, o per contraddizione

Vogliamo dimostrare una certa proposizione o teorema.

Esempio: esistono infiniti numeri primi

Lo dimostriamo facendo vedere che se il teorema fosse falso, allora si arriva ad un assurdo o contraddizione.

Esempio: supponiamo per assurdo che esistano solo un numero finito di numeri primi.

Diciamo quindi che $p_1, p_2, \dots, p_n$ sono tutti i numeri primi che esistono.

Consideriamo

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

Ogni numero ammette una scomposizione in fattori primi.

Andiamo a vedere a per quali numeri primi è divisibile

Domanda: p_1 divide a ? Ovvero, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $p_1 \cdot k = a$? Ovvero, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$p_1 \cdot k = a = p_1 \cdot (p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n) + 1 ?$$

Ovvero, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$p_1(k - p_2 p_3 \dots p_n) = p_1 \cdot k - p_1 \cdot (p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n) = 1 ?$$

No, questo non posso farlo, ad esempio perché non posso dividere 1 per p_1 .

Oppure, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$(k - p_2 \dots p_n) = \frac{1}{p_1} \in \mathbb{Q} \text{ perché } p_1 \neq 1$$

Lo stesso identico ragionamento lo posso fare anche per p_2 . Quindi anche p_2 non divide a . Allo stesso modo, qualsiasi primo $p_1, \dots, p_n$ non divide a .

Quindi a deve essere un numero primo.

Abbiamo raggiunto una contraddizione perché $a \neq p_i$, $i=1, \dots, n$ ed è primo, quindi

$\{p_1, \dots, p_n\}$ sono tutti
i numeri primi che
esistono

$a \notin \{p_1, \dots, p_n\}$
ed è un numero
primo.



Esercizio: la somma di numeri pari è pari.
Provate a dimostrarlo in maniera
diretta e per assurdo.

Dimostrazione

diretta: Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono numeri pari
allora $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ è pari

Partiamo dall'ipotesi e usiamo la definizione
di numero pari: un numero $x \in \mathbb{N}$ è pari
se $\exists y \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x = 2y$

Quindi:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2y_1 \\x_2 &= 2y_2 \\&\vdots \\x_n &= 2y_n\end{aligned}$$

Quindi:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_n$$

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sum_{i=1}^n 2y_i$$

$$2 \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$= 2(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Abbiamo dimostrato che $x_1 + \dots + x_n$ è divisibile per 2, quindi è pari. $\square$

Dimostrazione

per assurdo: neghiamo la proposizione: supponiamo

quindi che $x_1, \dots, x_n$ siano pari e

$x_1 + x_2 + \dots + x_n$ sia dispari

Come prima $\forall i=1, \dots, n, \exists y_i \in \mathbb{N}$ t.c. $x_i = 2y_i$

Inoltre, dire che $x_1 + \dots + x_n$ è dispari vuol

dire che $x_1 + \dots + x_n = 2y + 1$

Quindi

$$2y_1 + \dots + 2y_n = x_1 + \dots + x_n = 2y + 1$$

Quindi

$$2(y_1 + \dots + y_n) - 2y = 1$$

$$2(y_1 + \dots + y_n - y)$$

Quindi $\downarrow$ è un numero pari, perché è
divisibile per 2 $\downarrow$