

24/09

Dimostrazione per induzione

Situazione: dobbiamo dimostrare che

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ è vera}$$

Esempio: $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(n) = \text{la somma}$
 $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Attenzione: al di fuori di questa situazione non possiamo usare il metodo per induzione.

Ad esempio per dimostrare

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \text{ è divisibile per } 2$$

non possiamo usare l'induzione.

Oss: se l'affermazione è

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ pari}, n \text{ è divisibile per } 2$$

possiamo modificarla in

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2n \text{ è pari}$$

Metodo di dimostrazione per induzione:

Passo base: dimostro che $P(0)$ è vera

Nota: a volte possiamo scegliere di far partire l'induzione da $n=1$ o $n=2$, etc.

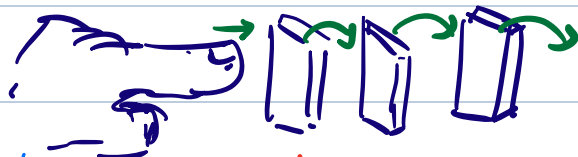
ipotesi induttiva

Passo induttivo: dimostro che se $P(n)$ è vera allora anche $P(n+1)$ è vera.

Completati questi due passi, otteniamo

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ è vera

se il passo base è $n=1$
qui avremo $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
In generale, se il passo base
è n_0 allora concludiamo
che $\forall n \geq n_0, P(n)$ è vera



ogni tessera
spinge l'altra
= passo
induttivo.

prima tessera
del domino
= passo base

Esempio: $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Scegliamo un passo base: $n=0$

Dobbiamo dimostrare che

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{0(0+1)}{2} \quad \leftarrow P(0)$$

$$\sum_{i=0}^0 i = 0, \quad \frac{0(0+1)}{2} = 0 \quad \checkmark$$

Passo induttivo: ipotesi induttiva: $P(n)$ è vera, ovvero

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \leftarrow P(n)$$

tesi induttiva: $P(n+1)$ è vera, cioè

$$1+2+3+\dots+n+(n+1) \\ = (1+2+\dots+n) + (n+1)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \leftarrow P(n+1)$$

Abbiamo

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \boxed{\sum_{i=0}^n i} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

per ipotesi induttiva
questa somma è $\frac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{1}{2} (n(n+1) + 2(n+1))$$

$$= \frac{1}{2} ((n+2)(n+1))$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

✓

Passo base ad $n=0$ + Passo induttivo

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \square$$

Esempio: $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Passo base: $n=0$:

$$0 = 0^2 = \sum_{i=0}^0 i^2 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0 \quad \checkmark$$

Passo induttivo: ipotesi induttiva: $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

tesi induttiva: $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \boxed{\sum_{i=0}^n i^2} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

per ipotesi induttiva
è uguale a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \frac{1}{6} \left(n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left((n+1) \left(n(2n+1) + 6(n+1) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left((n+1) (2n^2 + n + 6n + 6) \right) = \frac{1}{6} \left((n+1) (2n^2 + 7n + 6) \right)$$

Osserviamo che $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6$
 $= 2n^2 + 7n + 6$

Quindi

$$\frac{1}{6}((n+1)(2n^2 + 7n + 6)) = \frac{1}{6}((n+1)(n+2)(2n+3))$$



(Passo base ad $n=0$) $\wedge$ (Passo induttivo)

$$\Rightarrow \forall n \geq 0, \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esempio: $3^{2n} - 1$ è divisibile per 8 $\forall n \geq 0$

Passo base: $n=0$: $3^{2 \cdot 0} - 1 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

che è divisibile per 8



Passo induttivo: ipotesi: $3^{2n} - 1$ è divisibile per 8
 tesi: $3^{2(n+1)} - 1$ è divisibile per 8

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 1 &= 3^{2n+2} - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 \\ &= 3^{2n} \cdot (8 + 1) - 1 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{3^{2n} \cdot 8}_{\substack{\text{divisibile} \\ \text{per } 8}} + \underbrace{3^{2n} - 1}_{\substack{\text{per ipotesi induttiva} \\ \text{e' divisibile per } 8}}$$

Essendo somma di interi divisibili per 8, e' divisibile per 8.

Altro modo: $3^{2n+2} - 1$ quanta e' divisibile per 8
se e solo se la differenza

$$3^{2n+2} - 1 - (3^{2n} - 1)$$

$\swarrow$ divisibile per 8
per ip. ind.

e' divisibile per 8. Calcoliamo

$$\begin{aligned} 3^{2n+2} - 1 - (3^{2n} - 1) &= 3^{2n+2} \cancel{- 1} - 3^{2n} \cancel{+ 1} \\ &= 3^{2n} (3^2 - 1) = 3^{2n} \cdot 8 \end{aligned}$$

che e' un multiplo di 8.

Pagina web di Massimo Gobbino $\rightarrow$ Analisi 1 (24/25)
per ingegneria

Def: sia A un insieme. Definiamo l'insieme delle parti di A come

$$\mathcal{P}(A) = \{ S \mid S \subset A \}$$

Esempio: $A = \{1, 2\}$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{ \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset \}$$

$$A = \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$$

$$A = \{ \emptyset \}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, A \} = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$$

Prop: sia A un insieme finito di cardinalità n .

Allora la cardinalità

dell'insieme delle parti

$\mathcal{P}(A)$ di A è 2^n .

per A insieme finito
numero degli elementi
di A

Dim: per induzione

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(A)$ di un insieme

di cardinalità n ha

cardinalità 2^n .

Passo base: $n=0$

Se A è un insieme con 0 elementi

allora $P(A)$ è un insieme con $2^0 = 1$ elemento

Osserviamo che A è necessariamente $\emptyset$

e $P(A) = P(\emptyset) = \{\emptyset\} \Rightarrow P(A)$ ha cardinalità
 1 ✓

Notazione: $|A| = \text{cardinalità di } A$

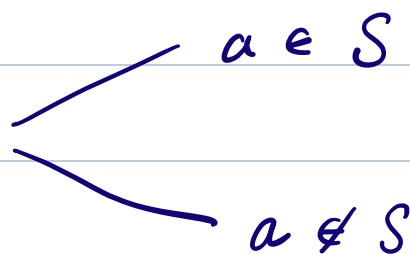
Passo induttivo: ipotesi: $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$

tesi: $|A| = n+1 \Rightarrow |P(A)| = 2^{n+1}$

Sia A un insieme con $n+1$ elementi

$\Rightarrow A \neq \emptyset \Rightarrow$ scegliamo $a \in A$, in questo modo $A \setminus \{a\}$ è un insieme con n elementi.

Osserviamo che se $S \subset A$ ci sono due possibilità



$$\Rightarrow P(A) = \overset{= P_1}{\{S \subset A \mid a \in S\}} \cup \overset{= P_2}{\{S \subset A \mid a \notin S\}}$$

Inoltre $P_1 \cap P_2 = \emptyset$

$$\Rightarrow |P(A)| = |P_1| + |P_2|$$

Osserviamo che $P_2 = \{S \subset A \mid a \notin S\}$

$$= \{S \subset A \mid S \subset A - \{a\}\}$$

$$\Rightarrow |P_2| = |P(A - \{a\})| = 2^n$$

↑ e' un insieme
di cardinalita' n

Possiamo applicare
l'ipotesi induttiva.

$$P_1 = \{S \subset A \mid a \in S\}$$

Osserviamo che

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \longrightarrow & P_2 \\ S & \longmapsto & S - \{a\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \longrightarrow & P_1 \\ S & \longmapsto & S \cup \{a\} \end{array}$$

Questa si chiama una bigezione, cioè una corrispondenza 1 a 1 tra gli elementi di due insiemi.

$$\Rightarrow |P_1| = |P_2| = 2^n$$

$$\begin{aligned}\text{Conclusione: } |P(A)| &= |P_1| + |P_2| = 2^n + 2^n = \\ &= 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}\end{aligned}$$

□

Esempio: $2^n \geq n^2$

Passo base: $n=0$: $2^0 \geq 0^2$ ✓

Passo induttivo: ipotesi: $2^n \geq n^2$
tesi: $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq 2n^2$$

↑
usiamo l'ipotesi induttiva

Vogliamo dimostrare che $2^{n+1} \geq (n+1)^2$
l'idea sarebbe dimostrare che

$$2h^2 \geq (h+1)^2$$

Espandiamo:

$$\cancel{h^2} + h^2 = 2h^2 \geq \cancel{h^2} + 2h + 1$$



$$h^2 \geq 2h + 1$$

per quali n questa disuguaglianza
è vera? Es: provare a dimostrare
per induzione

Questa è verificata se e solo se:

$$h^2 - 2h - 1 \geq 0$$

$$\parallel$$

$$h^2 - 2h + 1 - 2$$

$$\parallel$$

$$(h-1)^2 - 2$$



$$(h-1)^2 \geq 2$$

Osserviamo quindi che per $n=0, 1, 2$ questa disuguaglianza non è verificata, mentre per $n \geq 3$ è verificata.

$\Rightarrow$ il passo induttivo è vero $\forall n \geq 3$

Reimpostiamo l'induzione:

Passo base: $n=3$ $2^3 \geq 3^2$ $\times$
 $\parallel$
 $8 \geq 9$

Reimpostiamo l'induzione:

Passo base: $n=4$: $2^4 \geq 4^2 = 16$
 $\parallel$
 16 $\checkmark$

Passo induttivo: sappiamo che è verificato
 $\forall n \geq 3$

Passo base per $n=4$ + Passo induttivo

$\Rightarrow 2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4.$
 $\square$

$$n=0 \quad \checkmark$$

$$n=1 \quad 2^2 \geq 1^2 \quad \checkmark$$

$$n=2 : 2^2 \geq 2^2 \quad \checkmark$$

$$n=3 : \quad \times$$