

25/09

Disuguaglianza di Bernoulli

Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$.

Allora $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Dim: per induzione.

Passo base: ($n=0$)

$1 = (1+x)^0$, vogliamo dimostrare che è
maggiore uguale di $1 + 0 \cdot x = 1$ ✓

Passo induttivo: ipotesi: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \stackrel{\text{ipotesi induttiva}}{\geq} (1+x)(1+nx) \\ &\stackrel{\substack{1+x > 0 \\ \Leftrightarrow x > -1}}{=} 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

Per induzione la disuguaglianza è vera $\forall n \geq 0$ $\square$

Combinatoria

Abbiamo un sacco con delle palline numerate da 1 a 5. Ne estraiamo 3. Quante combinazioni possibili di numeri possiamo ottenere?

Exemplo: (2) (1) (4) , (1) (5) (3) , ...

Ci sono due modi di intendere il problema:
combinazioni **ordinate** oppure **non ordinate**.

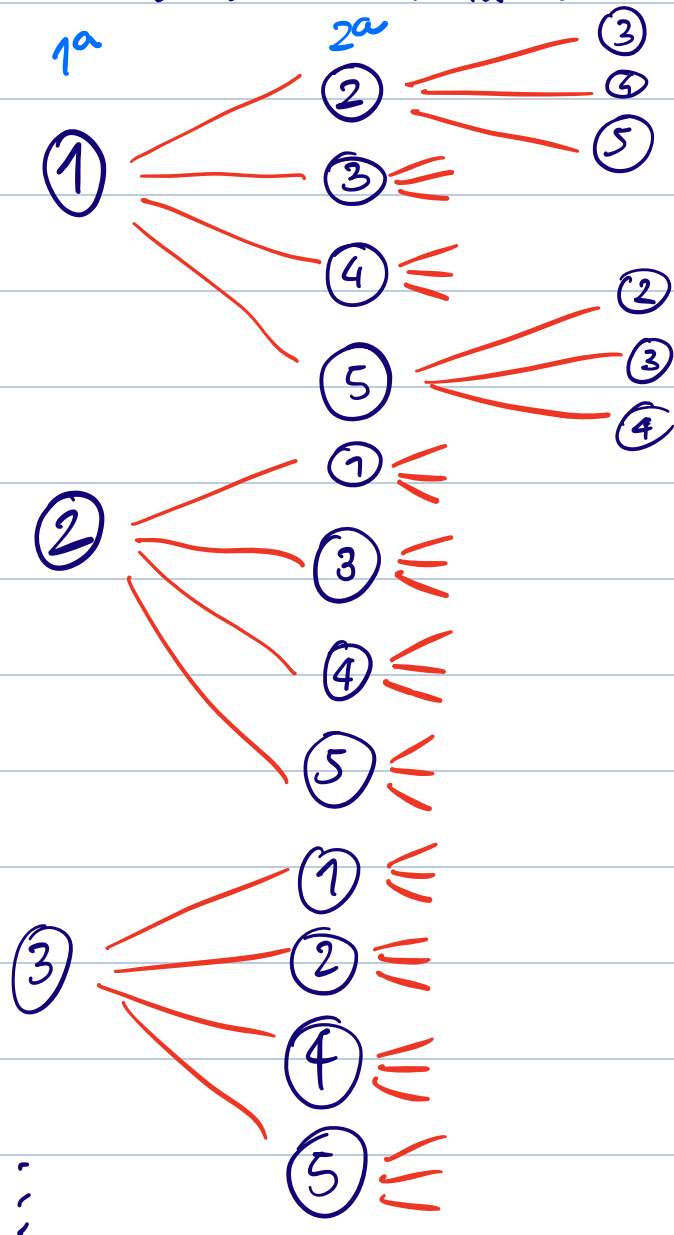
Ordinate: conta l'ordine con cui estraggo le palline. Es: ①②③ ≠ ③①②


Non ordinate: non conta l'ordine di estrazione

E_S: {①, ②, ③} = {③, ①, ②}

Contiamo le combinazioni ordinate possibili:
Quante possibili palline posso ottenere con la prima

estrazione? 5. Per la seconda? 4. Per la terza? 3



⇒ 5 possibilità per la prima estrazione.

Per ciascuna di queste 5 possibilità, ne ho

4 per la seconda estrazione ⇒ $5 \cdot 4$ possibilità
20

Per ciascuna di queste 20 possibilità, ho 3 ulteriori
possibilità per la terza estrazione.

$$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

In generale, se le palline nel sacco sono n e ne estraggo k , il numero di possibili combinazioni ordinate è

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Notazione: $\prod_{i=0}^N a_i = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N$

valori qualsiasi

Notazione: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$

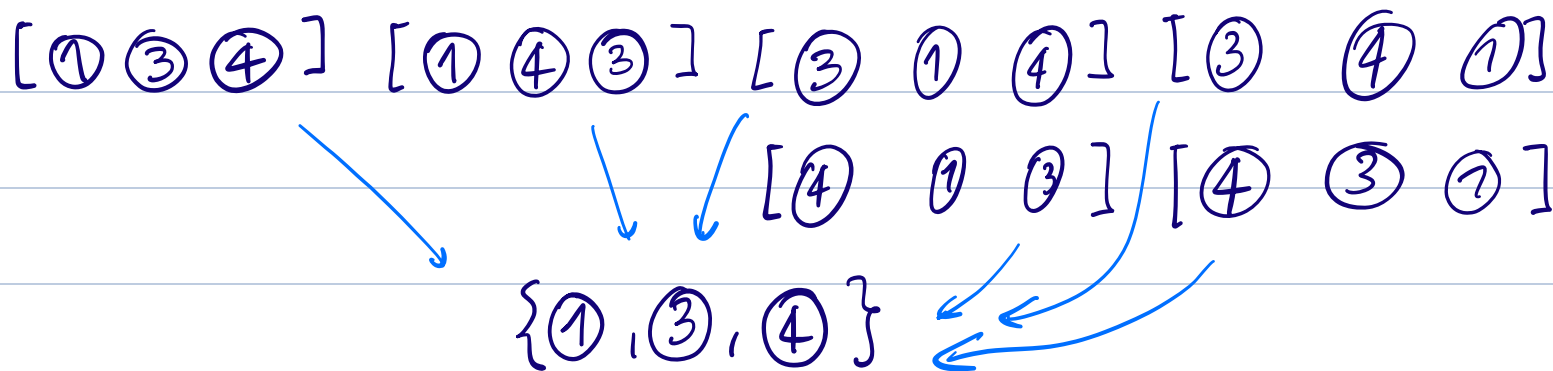
$n \in \mathbb{N}$ *si chiama fattoriale*

Possiamo quindi riscrivere

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

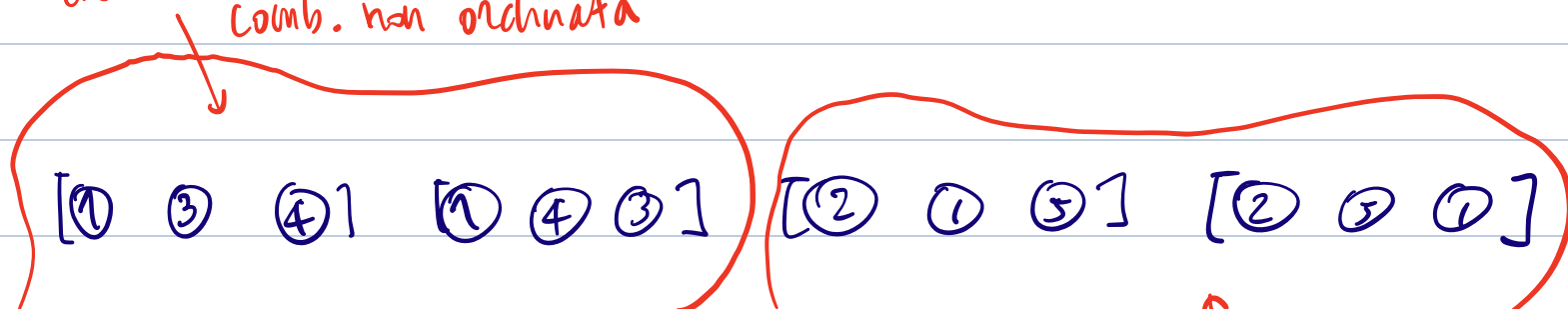
Quante sono invece le combinazioni *non-ordinate*?
Prendiamo le combinazioni ordinate che, quando

dimentichiamo l'ordine, sono tutte uguali



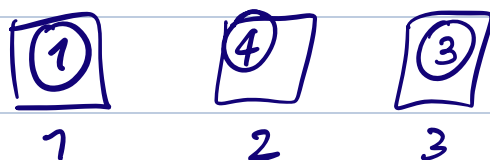
$$\begin{array}{l} \# \text{ combinazioni} \\ \text{non ordinate} \end{array} = \frac{\# \text{ combinazioni } \textcolor{red}{\text{ordinate}}}{\# \text{ combinazioni } \textcolor{red}{\text{ordinate}} \text{ che determinano la stessa combinazione } \textcolor{blue}{\text{non ordinata}}}$$

determinano la stessa comb. non ordinata



determinano la stessa comb. non ordinata

Quante sono i modi di sistemare 3 palline in 3 spazi



Per il primo spazio abbiamo 3 possibilità.

Per il secondo spazio abbiamo 2 possibilità.

Per il terzo spazio abbiamo 1 possibilità.

$$\Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Combinazioni non ordinate
di 3 palline estratte da
un sacco con 5 palline

$$= \frac{60}{6} = 10$$

Formula generale:

#combinazioni non ordinate di k palline
estratte da un sacco con n palline
||

sottoinsiemi di cardinalità k di un
insieme di cardinalità n

$$\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

← combinazioni ordinate

Def: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$ (binomiale)

$k \leq n$ 

Prop: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Dim: se A è un insieme e $|A| = n$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

$$\mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subset A\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{S \mid S \subset A, |S|=0\} \overset{= P_0}{=} \cup \\
 &\cup \{S \mid S \subset A, |S|=1\} \overset{= P_1}{=} \cup \\
 &\cup \{S \mid S \subset A, |S|=2\} \overset{= P_2}{=} \cup \dots \\
 &\dots \cup \{S \mid S \subset A, |S|=n\} \overset{= P_n}{=}
 \end{aligned}$$

Questa è un'Unione disgiunta.

Quindi:

$$|\mathcal{P}(A)| = |P_0| + |P_1| + |P_2| + \dots + |P_n|$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

□

Exmpio: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$$

$$P_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \dots\}$$

$$\Rightarrow 2^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \dots + \binom{5}{5}$$

Prop: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Dim: $\binom{n+1}{k+1} = \left| \left\{ S \subset \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\} \mid |S| = k+1 \right\} \right|$ // A

$$P_{k+1} = \{S \subset A \mid |S| = k+1\}$$

$$P_{k+1} = \{S \subset A \mid |S| = k+1, a_{n+1} \in S\} \stackrel{=Q}{=}$$

$$\cup \{S \subset A \mid |S| = k+1, a_{n+1} \notin S\} \stackrel{=R}{=}$$

$$= Q \cup R$$

Questa è un'unione disgiunta

$$\Rightarrow |P_{k+1}| = |Q| + |R|$$

$$R = \{ S \subset A \mid |S| = k+1, a_{n+1} \notin S \}$$

$$= \{ S \subset A \setminus \{a_{n+1}\} \mid |S| = k+1 \}$$

↑
quindi sottoinsiemi di cardinalità $k+1$ in un insieme $A \setminus \{a_{n+1}\}$ di cardinalità n

$$\Rightarrow |R| = \binom{n}{k+1}$$

$$Q = \{ S \subset A \mid |S| = k+1, a_{n+1} \in S \}$$

$$Q \longrightarrow \{ S \subset A \setminus \{a_{n+1}\} \mid |S| = k \}$$

ψ

$$S \longmapsto S \setminus \{a_{n+1}\}$$

↑
è un sottoinsieme di cardinalità k di $A \setminus \{a_{n+1}\}$, che ha cardinalità n .

Questa funzione e' una bigezione.

$$\{S \subset A \setminus \{a_{n+1}\} \mid |S| = k\} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

$$S \longmapsto S \cup \{a_{n+1}\}$$

e' l'inversa della funzione precedente.

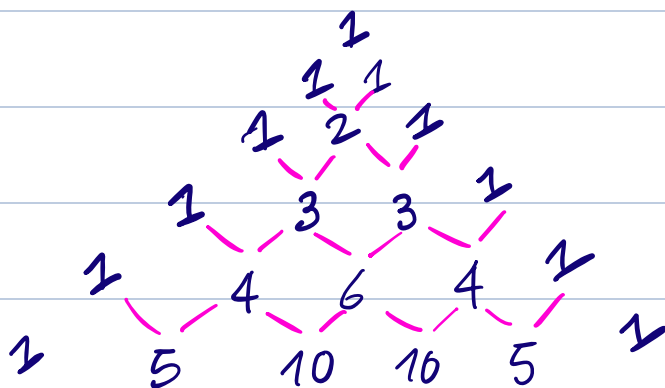
Essendo una corrispondenza biunivoca

$$|\mathcal{Q}| = |\{S \subset A \setminus \{a_{n+1}\} \mid |S| = k\}| = \binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow |P_k| = |Q| + |R|$$



$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$



Esercizi

(1) Capire perché il triangolo di Tartaglia calcola i binomiali.

(2) Dimostrare che

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

(3) Dimostrare che i coefficienti binomiali sono simmetrici:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(4) $3^n + 4^n < 5^n$ per quali $n \in \mathbb{N}$?

(5) $4^n + 5^n < 6^n$ per quali $n \in \mathbb{N}$?

(6) $2^n \geq n^3$ per quali $n \in \mathbb{N}$?

(7) $n^3 \geq 3n^2 + n + 1$ per quali $n \in \mathbb{N}$?