

28/09

$$(1) \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \forall n \geq 0$$

Per induzione su n .

Passo base $n=0$: $(x+y)^0 = 1$

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} = 1$$

Passo induttivo: ipotesi: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

ten: $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \cdot (x+y)^n = (x+y) \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right)$$

↑
applico l'ipotesi

$$= x \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{(n+1)-(k+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

= $n-k$ ↓

$$= \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} x^h y^{(n+1)-h}$$

Dobbiamo capire chi è questo coefficiente

$C_{n+1,h}$ è il coefficiente davanti a $x^h y^{(n+1)-h}$.

Se $0 < h < n+1$ allora

$$C_{n+1,h} = \binom{n}{h-1} + \binom{n}{h}$$

contributo che
viene dalla prima
sommatoria

contributo
che viene
dalla 2ª somm.

formula vista
la scorsa
volta

$$= \binom{n+1}{h}$$

Se $h=0$ o $h=n+1$ si vede subito che

$$C_{n+1,0} = 1 = C_{n+1,n+1}$$

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1}$$

Passo base + Passo induttivo $\Rightarrow$ dimostrato $\square$
 $n=0$ $\forall n \geq 0$ per induzione $\forall n \in \mathbb{N}$

Coroll: $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

Dim: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ sostituiamo $x=1$, $y=1$.
 $\Rightarrow (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ $\square$
 $\stackrel{||}{=} 2^n$

(2) $5^n > 3^n + 4^n$ per quali n ?

Per induzione:

Passo induttivo: ipotesi: $5^n > 3^n + 4^n$

tesi: $5^{n+1} > 3^{n+1} + 4^{n+1}$

ipotesi ind.

$$5^{n+1} = 5^n \cdot 5 > (3^n + 4^n) \cdot 5 = 3^n \cdot 5 + 4^n \cdot 5$$

Osserviamo che: $3^n \cdot 5 > 3^n \cdot 3$ perché $3^n > 0, 5 > 3$
 $4^n \cdot 5 > 4^n \cdot 4$ perché $4^n > 0, 5 > 4$

$$\Rightarrow 3^n \cdot 5 + 4^n \cdot 5 > 3^n \cdot 3 + 4^n \cdot 4 = 3^{n+1} + 4^{n+1}$$

$\Rightarrow$ passo induttivo verificato $\forall n \geq 0$.

Passo base: $n=0$: $5^0 > 3^0 + 4^0 = 1+1=2$

"
↓

X

$n=1$: $5^1 > 3^1 + 4^1 = 7$

"
5

X

$n=2$:

$5^2 > 3^2 + 4^2$

"
25 " 9 + 16

X

$$n=3 : \quad \begin{array}{c} 5^3 > 3^3 + 4^3 \\ \parallel \quad \parallel \\ 125 > 27 + 64 \end{array} \quad \checkmark$$

(3) $2^n \geq n^3$, procediamo per induzione.

Passo induttivo: ipotesi: $2^n \geq n^3$
 tesi: $2^{n+1} \geq (n+1)^3$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \stackrel{\substack{\downarrow \text{ipotesi ind.}}}{\geq} 2 \cdot n^3$$

Per concludere, vorremmo che $2 \cdot n^3 \geq (n+1)^3$

ovvero

$$2n^3 \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1$$

Se la disuguaglianza è vera $\Rightarrow$ $\begin{array}{c} \nearrow \\ \text{passo induttivo} \\ \text{è vero} \end{array}$

Ci siamo ridotti quindi a dimostrare questa disuguaglianza. Procediamo per induzione.

Passo induttivo: ipotesi: $n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1$

tesi: $(n+1)^3 \geq 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$

ipotesi ind.

$$(n+1)^3 = \boxed{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 \geq (3n^2 + 3n + 1) + (3n^2 + 3n + 1) \\ = 2(3n^2 + 3n + 1).$$

Per concludere dobbiamo dimostrare che

$$2(3n^2 + 3n + 1) \geq 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$$

$\Leftrightarrow$

$$6n^2 + 6n + 2 \geq 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 + 1 \\ \parallel \\ 3n^2 + 9n + 7$$

$\Leftrightarrow$

$$3n^2 - 3n - 5 \geq 0$$

Studiamo la disuguaglianza $3x^2 - 3x - 5 \geq 0$.

Calcoliamo gli zeri:

$$\Delta = 9 - 4(3)(-5) = 9 + 60 = 69$$

$$x_+ = \frac{3 + \sqrt{69}}{6}$$

$$x_- = \frac{3 - \sqrt{69}}{6}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3x - 5 \geq 0 \quad \forall x \text{ tale che } x \leq \frac{3 - \sqrt{69}}{6} \\ \vee x \geq \frac{3 + \sqrt{69}}{6}$$

Osserviamo che $\sqrt{69} > \sqrt{64} = 8$

$$\Rightarrow \frac{3 - \sqrt{69}}{6} \leq \frac{3 - 8}{6} < 0.$$

$$\frac{3 + \sqrt{69}}{6} \underset{\substack{\uparrow \text{circa} \\ \text{strettamente}}}{\sim} \frac{3 + \sqrt{64}}{6} = \frac{3 + 8}{6} = \frac{11}{6}$$

che è compreso fra 1 e 2.

Quindi la disuguaglianza $3n^2 - 3n - 5 \geq 0$ è verificata $\forall n \geq 11/6$ cioè $\forall n \geq 2$, perché n è naturale.

Quindi il passo induttivo è verificato $\forall n \geq 2$

Passo base: $n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1$ per $n = 2$

$$\Rightarrow 8 \geq 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \quad \times$$

$$\text{per } n=3 : 27 \geq 27 + 3 \cdot 3 + 1 \quad \times$$

$$\text{per } n=4 : 64 \geq 3 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 1 = 61 \quad \checkmark$$

Abbiamo dimostrato: $n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1 \quad \forall n \geq 4$

Abbiamo quindi dimostrato il passo induttivo

$$2^n \geq n^3 \Rightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^3 \text{ e' vero } \forall n \geq 4.$$

Passo base:

$n=4$	:	$2^4 \geq 4^3$	X
$n=5$	:	$2^5 \geq 5^3$	X
$n=6$	:	$2^6 \geq 6^3 = 2^3 \cdot 3^3$	X
$n=7$	:	$2^7 \geq 7^3$	X
$n=8$	:	$2^8 \geq 8^3$	X
		"512"	
$n=9$	:	$2^9 \geq 9^3$	X
$n=10$	:	$2^{10} \geq 10^3$	✓

Passo base per $n=10$ + Passo induttivo per $n \geq 4$

$$\Rightarrow 2^n \geq n^3 \quad \forall n \geq 10$$

□

(4) ~~$2^n \geq n!$~~ $2^n \leq n!$ da un certo n in poi.

Passo induttivo: ipotesi: $2^n \leq n!$

$$\text{tesi: } 2^{n+1} \leq (n+1)!$$

ipotesi ind.

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \leq (n!) \cdot 2, \text{ per concludere vorremmo}$$

dimostrare che $(n!) \cdot 2 \leq (n+1)!$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot \cancel{n} \cdot (n+1)}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot \cancel{n}} = n+1$$

Quindi il passo induttivo è verificato $\forall n \geq 1$.

Passo base : $n=1 : 2^1 \leq 1! \quad \times$

$n=2 : 2^2 \leq 2! \quad \times$

$n=3 : 2^3 \leq 3! \quad \times$

$n=4 : 2^4 \leq 4! \quad \checkmark$

Conclusione: $2^n \leq n! \quad \forall n \geq 4$.

(5) $2^{(n^2)} \geq n!$

Passo induttivo: ipotesi: $2^{n^2} \geq n!$

tesi: $2^{((n+1)^2)} \geq (n+1)!$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \leq (n+1) \cdot 2^{n^2}$$

$\uparrow$ ipotesi induttiva

Per concludere, vorremmo dimostrare che

$$(n+1) \cdot \cancel{2^{n^2}} \leq 2^{((n+1)^2)} = 2^{(n^2 + 2n + 1)} = \cancel{2^{n^2}} \cdot 2^{2n+1}$$

$$\updownarrow$$

$$(n+1) \leq 2^{2n+1}$$

Esercizio: dimostrare questa disuguaglianza per induzione $\forall n \geq 0$.

Quindi il passo induttivo è verificato $\forall n \geq 0$,
per esercizio trovate il passo base.

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Passo induttivo: ipotesi: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

tesi: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\left(\frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{k=1 \text{ a } k=n} \quad \quad \quad k=n+1$

ipotesi ind $\rightarrow = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{\cancel{(n+1)}(n+2)}$$

Passo induttivo verificato $\forall n \geq 0$.

Passo base $n=0$ (e siete dei logici)

$$\begin{array}{l} n=1 \\ \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} \\ \parallel \\ \frac{1}{1(1+1)} \end{array}$$

$$\sum_{k=1}^0 \frac{1}{k(k+1)} = 0 \quad \begin{array}{l} \parallel \\ 0/1 \\ \parallel \end{array}$$

$\Rightarrow$ vera $\forall n \geq 0$.

$$(7) \quad 4^n \geq \binom{2n}{n}$$

Passo induttivo: ipotesi: $4^n \geq \binom{2n}{n}$

ip. ind. $\downarrow$ tesi: $4^{n+1} \geq \binom{2(n+1)}{n+1}$

$$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \geq 4 \cdot \binom{2n}{n}$$

Vogliamo dimostrare allora che

$$4 \cdot \binom{2n}{n} \geq \binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} \stackrel{\text{definizione di coeff. binomiale}}{=} \frac{(2n+2)!}{(n+1)! (n+1)!}$$

$$4 \cdot \frac{2n!}{n! \cdot n!}$$

$$4 \geq \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$$

Semplifichiamo usando

$$\begin{cases} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1} \\ \frac{(2n+2)!}{2n!} = (2n+1)(2n+2) \end{cases}$$

otteniamo $4 \geq \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$

$$\Downarrow$$

$$4(n+1)^2 \geq (2n+1)(2n+2)$$

$$4n^2 + 8n + 4 \geq 4n^2 + 6n + 2$$

$$\Downarrow$$

$$2n + 2 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$n \geq 0$$

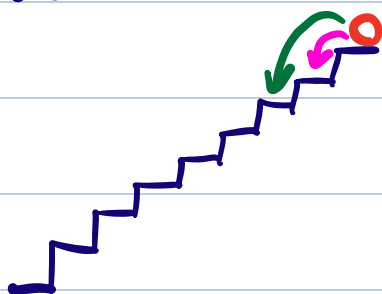
Quindi il passo induttivo è verificato $\forall n \geq 0$

Passo base si verifica a mano.

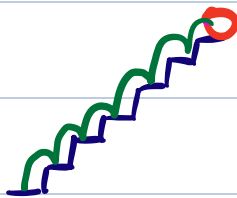
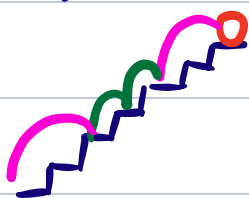
Esercizi

(1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2$ [sugg: usare l'esempio (6)]

(2) Consideriamo una scala con n gradini.

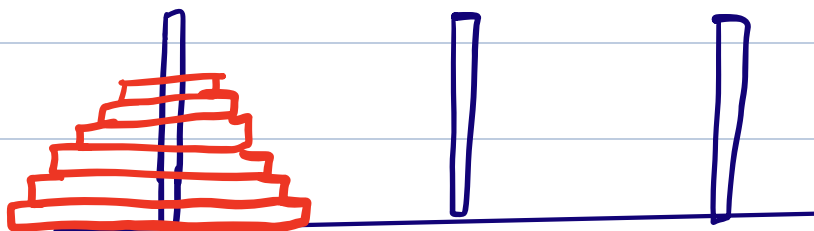


La pallina può rimbalzare saltando un gradino oppure può finire sul gradino successivo



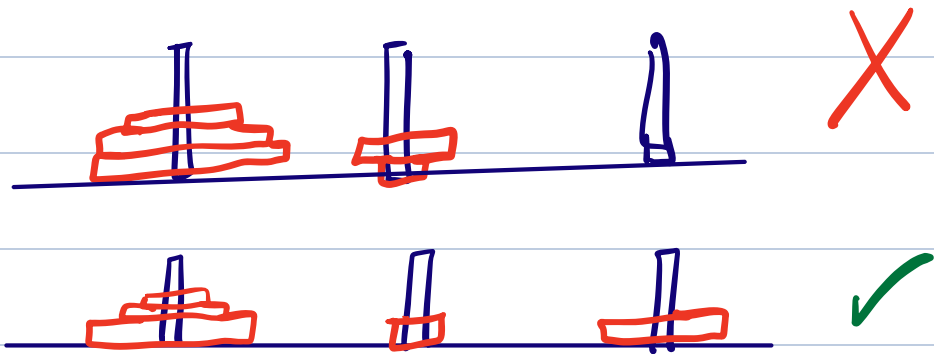
In quanti modi possibili può arrivare a terra?

(3)



Avete n dischi. Potete spostare i dischi

estraendoli dall'alto e inoltre potete
infilare un disco solo sopra un disco
di diametro maggiore



Qual è il numero minimo di mosse
per spostare tutti i dischi su un altro
palo?



Risposta: $2^n - 1$ dove n è il numero di
dischi.