04/03

Richiami di algebra lineare

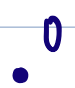
Spazi vettoriali

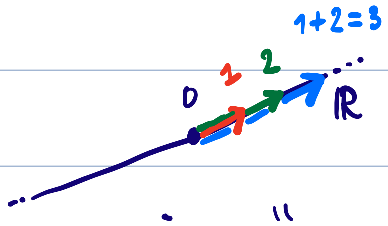
Campo base $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

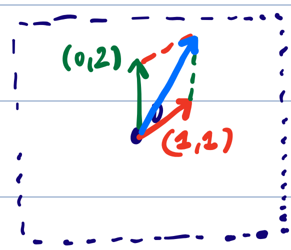
Cos'è uno spazio vettoriale?

Visualizzazione :

$(0,2)+(1,1) = (1,3)$

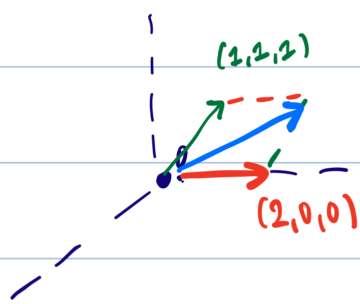






possiamo "sommare" i vettori

possiamo "riscalare" i vettori



$(1,1,1)+(2,0,0) = (3,1,1)$

<u>Definizione</u>: uno spazio vettoriale V su un campo K è un insieme V dotato di un'operazione

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$v, w \longmapsto v+w$$

e di un'operazione

$$\cdot : K \times V \longrightarrow V$$
$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$$

e di un elemento 0 che sodisfano le seguenti proprietà:

(1) l'elemento 0 è l'elemento neutro per la somma, cioè $v+0 = 0+v = v$;

(2) la somma è associativa, commutativa ed ogni elemento ammette un opposto, cioè

(assoc.) $(v+w)+u = v+(w+u)$

(comm.) $v+w = w+v$

(opp.) $\forall v, \exists w$ tc $v+w=0$

(3) il prodotto per scalare verifica le seguenti proprietà:

- $\lambda, \mu \in K, v \in V \Rightarrow \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$

$\Rightarrow (\lambda+\mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$

- $1 \cdot v = v, \quad 0 \cdot v = 0$
- $\lambda \in K, \; v, w \in V \Rightarrow \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

Esempi

- $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; x_i \in \mathbb{R} \right\}$ es: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Origine: $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Somma: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

Prodotto per scalare: $K = \mathbb{R}$

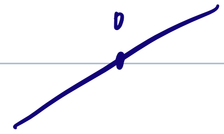
$$\lambda \in \mathbb{R}, \; v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda v := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

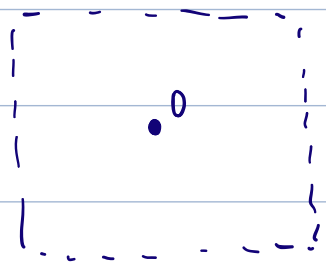
es: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 1+3 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

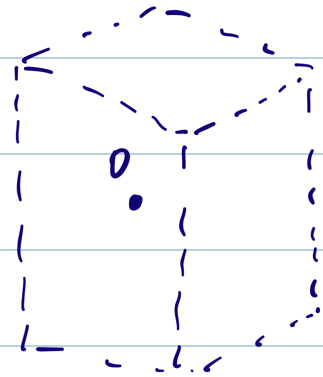
$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

Geometricamente:

$\cdot^{0} = \mathbb{R}^0$

 $= \mathbb{R}^1$

 $= \mathbb{R}^2$

 $= \mathbb{R}^3$

- $\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ x_i \in \mathbb{C} \right\}$, somma e prodotto scalare sono definiti analogamente.

- $V = \left\{ \begin{array}{l} \text{polinomi in una variabile } t \text{ a} \\ \text{coefficienti reali} \end{array} \right\}$

$p(t) = \sum a_i t^i$
$q(t) = \sum b_i t^i$
$\Rightarrow p+q = \sum (a_i+b_i) t^i$

Origine: polinomio costante 0

Somma: somma di polinomi $p(t) + q(t)$

Prodotto per uno scalare: $\lambda \in \mathbb{R},\ p(t) \in V \Rightarrow \lambda \cdot p(t)$

Verifica le proprietà necessarie per essere uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Stessa cosa si può fare per polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$.

- $V = \{$polinomi in t di grado $\leq 7\}$

Anche questo è uno spazio vettoriale:

$0 =$ polinomio costante uguale a zero

somma: somma di polinomi.

⚠ : in questo caso la somma è ben definita perché se $\deg(p(t)) \leq 7$, $\deg(q(t)) \leq 7$

$$\Rightarrow \deg(p(t)+q(t)) \leq 7$$
$$\Rightarrow p(t)+q(t) \in V.$$

tali che

- Non-esempio: $V = \{ p(t)$ polinomi tc $p(0)=1 \}$

La somma non è ben definita

$$(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 1 + 1 = 2$$

$p, q \in V$

$$\Rightarrow p+q \notin V.$$

Inoltre, non è chiaro chi sia l'origine, poiché $0 \notin V$.

Un concetto fondamentale per spazi vettoriali è quello di <u>combinazione lineare</u>.

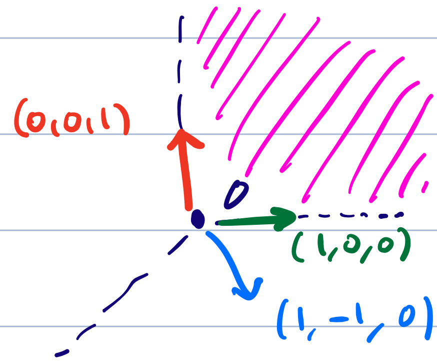
<u>Def</u>: dati V sp. vett. su K, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è un vettore $w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n$ dove $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$.

Cosa vuol dire geometricamente?

$V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Il vettore $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ <u>non</u> è combinazione lineare di v_1, v_2. Geometricamente, non appartiene al piano generato da v_1 e v_2: tutte le possibili combinazioni lineari di v_1 e v_2 sono i vettori nel piano ////

Algebricamente: $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot 1 \\ a_1 \cdot 0 \\ a_1 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \cdot 0 \\ a_2 \cdot 0 \\ a_2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ 0 \\ 0 + a_2 \end{pmatrix}$$

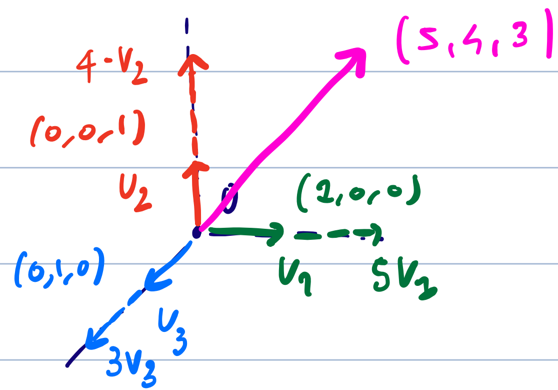
$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ \boxed{0} \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Quindi qualsiasi combinazione lineare di v_1 e v_2 avrà sempre la seconda coordinata nulla.

Ne deduciamo che $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ <u>non</u> può essere combinazione lineare di v_1, v_2.

<u>Esempio</u>

- $V = \mathbb{R}^3$



$$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

<u>Osservazione</u>: qualsiasi vettore $v \in \mathbb{R}^3$ si può scrivere come combinazione lineare:

$$v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

$$v = x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Diciamo in questo caso che $\{v_1, v_2, v_3\}$ <u>generano</u> $V = \mathbb{R}^3$

<u>Def</u>: un sottoinsieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ <u>genera</u> V (oppure, forma un sistema di generatori) se ogni vettore $w \in V$ è combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ovvero $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n.$$

<u>Esempi</u>

- $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V = \mathbb{R}^3$. L'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ forma un sistema di generatori?

Andiamo a vedere quali vettori riusciamo a generare.

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$= a_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a_1 + 2a_3 \\ a_1 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$$

Vediamo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non si riesce a scrivere come $\begin{pmatrix} 2a_1 + 2a_3 \\ a_1 - a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ per qualche scelta di $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ **NON** e' un sistema di generatori.

- $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Formano un sistema di generatori?
Le combinazioni lineari sono

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a_1 + a_3 \\ a_1 - a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Cosa vuol dire che ogni vettore si scrive come combinazione lineare?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = \begin{pmatrix} 2a_1 + a_3 \\ a_1 - a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ generano $\mathbb{R}^3$ se e solo se per ogni scelta di x_1, x_2, x_3, $\exists\, a_1, a_2, a_3$ tc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 + a_3 \\ a_1 - a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_3 = x_1 \\ a_1 - a_2 = x_2 \\ a_3 = x_3 \end{cases}$$

valori noti

riesco a trovare a_1, a_2, a_3

- $\boxed{a_3 = x_3}$ $\Rightarrow$ $2a_1 + a_3 = x_1$, sostituisco $a_3 = x_3$

e ottengo $2a_1 + x_3 = x_1$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{x_1 - x_3}{2}}$$

$a_1 - a_2 = x_2$, sostituisco $a_1 = \frac{x_1 - x_3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - x_3}{2} - a_2 = x_2$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{x_1 - x_3}{2} - x_2}$$

Quindi il sistema lineare ammette una soluzione per ogni scelta di x_1, x_2, x_3.

Questo per il ragionamento fatto equivale a dire che riesco sempre a scrivere i vettori come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.