05/03

Esercizi

Generatori, indipendenza lineare, basi, dimensione

- Determinare se i vettori seguenti generano, sono lin. indip., sono una base.

(1) $V=\mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} \right\}$.

(2) $V = \left\{ v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \text{ tc } 2x_1 - x_2 = 0 \right\}$,

$\left\{ \begin{pmatrix}2\\4\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$.

(3) $V = \mathbb{C}^2$, $\left\{ \begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2i\end{pmatrix} \right\}$

- Calcolare la dimensione dei seguenti spazi:

(5) $U = \left\{ v = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ x_1+x_2=0,\ x_3=3x_4 \right\}$

(6) $U = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 = 0, \quad x_1 - x_4 = 0 \\ 7x_1 + 6x_2 = 0 \end{array} \right\}$

Applicazioni lineari

(7) sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Descrivere il nucleo di f, dire se f e' iniettiva, suriettiva o isomorfismo.

(8) sia $V = \{ p(t) \text{ polinomi di grado} \leq 3 \}$

e sia

$$f : V \to V, \quad p(t) \longmapsto t \cdot p'(t)$$

Dire se f è iniettiva, suriettiva, isomorfismo.

Matrici

- Calcolare il rango delle seguenti matrici, e descrivere l'applicazione lin. f_M associata.

(9) $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(10) $M = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

(11) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

- Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

(12) Determinare se f è invertibile e nel caso determinare l'inversa.

Sottospazi

(13) Dare esempio di sottospazi $U, W \subset V$ tali che $U + W \neq V$, $U \cap W = \{0\}$

(14) Dare esempio di sottospazi tali che $\dim(U \cap W) = 2$, $\dim U + W = 4$.