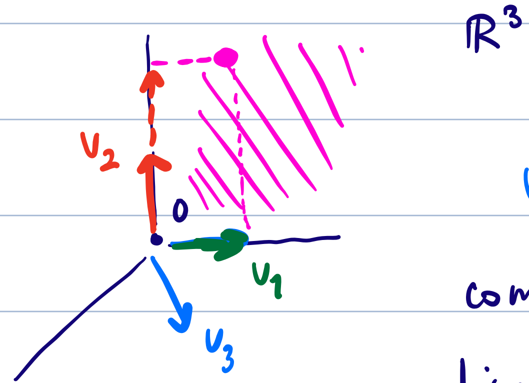
06/03

Lezione scorsa: spazi vettoriali, sistema di generatori:

Def: un sottoinsieme $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ si dice <u>sistema di generatori</u> oppure <u>che genera</u> se $\forall w \in V$, $\exists$ coefficienti $a_1, \ldots, a_n \in K$ tali che

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

Geometricamente: w si scrive come comb. lin. di $v_1, \ldots, v_n$ se appartiene allo spazio vettoriale generato da $v_1, \ldots, v_n$



v_3 <u>non</u> si scrive come combinazione lineare di v_2 e v_1

<u>Notazione</u>: dato un sottoinsieme di vettori $v_1, \ldots, v_n$ scriviamo:

$$\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \left\{ w \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists a_1, \ldots, a_n \in K \\ w = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \end{array} \right\}$$

Importante: $\text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ è esso stesso uno spazio vettoriale.

Infatti se prendiamo $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : K \times V \to V$ osserviamo che $\text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ è chiuso rispetto a queste operazioni:

- se $w, w' \in \text{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} \Rightarrow w + w' \in \text{Span}\{..\}$
- se $\lambda \in K$, $w \in \text{span}\{v_1, \ldots, v_n\} \Rightarrow \lambda w \in \text{span}\{..\}$
- $0 \in \text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$

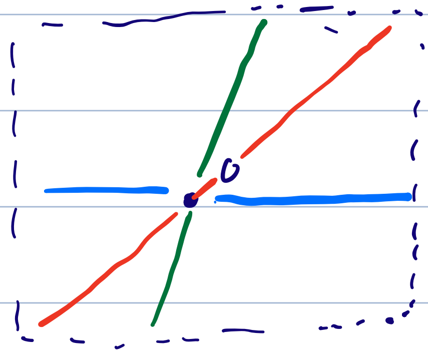
Esercizio: dimostrare questa affermazione.

Lo $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ è un esempio di sottospazio vettoriale:

Def: un sottospazio $U \subset V$ è un sottoinsieme di V contenente 0 e chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare.

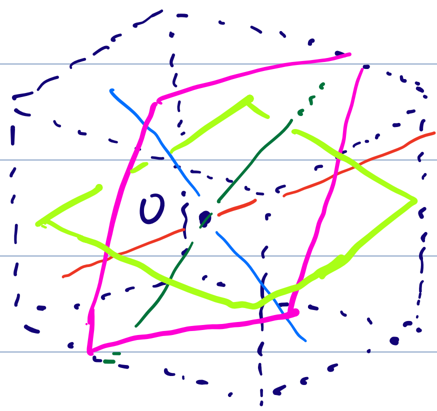
Es: • $\mathbb{R}^5 = V$ $\quad \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = U \Rightarrow U \subset V$ sottospazio

• $\mathbb{R}^2$



I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono l'origine stessa, le rette passanti per l'origine, e $\mathbb{R}^2$

• $\mathbb{R}^3$



I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono 0, tutte le rette per 0, tutti i piani per 0, e $\mathbb{R}^3$

• $V = \{ p(t) \text{ polinomi di grado } \leq 5 \}$

$U = \{ p(t) \text{ polinomi di grado } \leq 5 \text{ tc } p'(t) = 0 \}$

Verifichiamo: $0 \in U$? Si, $p(t) = 0 \Rightarrow p'(t) = 0$ ✓

Se $p, q \in U \Rightarrow p + q \in U$?

Per ipotesi, $p' = q' = 0 \Rightarrow (p+q)' = p' + q' = 0 + 0 = 0$ ✓

Se $p \in U$, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda p \in U$?

Per ipotesi $p' = 0 \Rightarrow (\lambda p)' = \lambda \cdot (p') = \lambda \cdot 0 = 0$ ✓

$\Rightarrow U$ e' un sottospazio

<u>Esercizio</u>: $U = \{ p(t) \text{ tali che } p(3) = 0 \}$
E' un sottospazio?
$U = \{ p(t) \text{ tali che } p''(\pi) = 0 \}$
E' un sottospazio?

Dati due sottospazi $U, W \subset V$, possiamo generarne nuovi sottospazi:

<u>Prop</u>: $U \cap W$ è ancora un sottospazio.
Dimostriamolo:
- $0 \in U \cap W$? Si, perché $0 \in U$ perché U è un sottospazio, $0 \in W$ per la stessa ragione $\Rightarrow 0 \in U \cap W$.

- $v, v' \in U \cap W \Rightarrow v + v' \in U \cap W$?

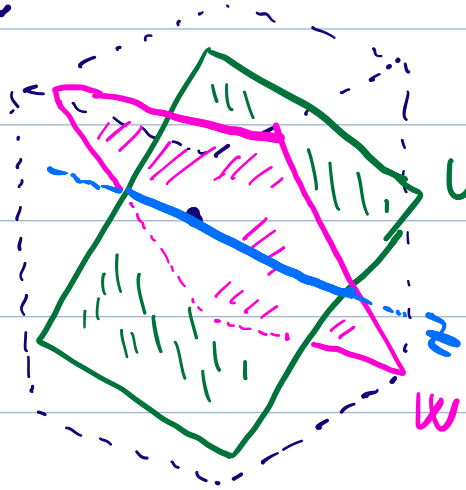
$v, v' \in U \Rightarrow \boxed{v + v' \in U}$ perché U è sottosp.
$v, v' \in W \Rightarrow \boxed{v + v' \in W}$ perché W è sottosp.

$\hookrightarrow v + v' \in U \cap W$

- il fatto che $U \cap W$ è chiusa rispetto al prodotto per scalare si dimostra allo stesso modo.

Geometricamente:

$\mathbb{R}^3$

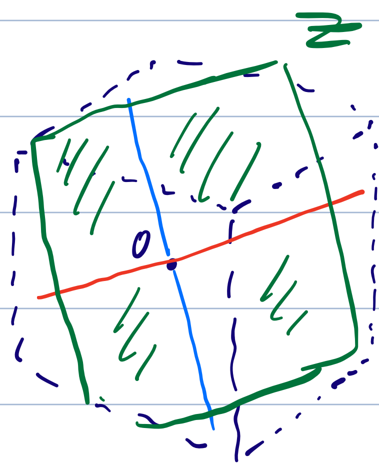


$W \cap U = Z$

Prop: $U, W \subset V$ sia $U + W := \{ v \in V \mid v = u + w \}$ (con $u \in U$, $w \in W$) è un sottospazio.

Geometricamente:

$\mathbb{R}^3$



$U + W = Z$ è il piano che contiene entrambe le rette

Def: i vettori $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ si dicono linearmente indipendenti se gli unici coefficienti $a_1, \ldots, a_n \in K$ tali che

$$0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

sono solo $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Es: • $V = \mathbb{R}^n \Rightarrow \{v\}$ linearmente indipendente se $v \neq 0$.

Per definizione: $av = 0$ ha come soluzione solo $a = 0$ se $v \neq 0$, altrimenti qualsiasi valore di a va bene.

• $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ sono lin. indipend.

se $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 0 = 2a_1 + a_2 \\ 0 = a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a_2 \\ 0 = a_1 \end{cases}$$

• $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ NON sono lin. ind.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ma i coefficienti non sono tutti nulli.

<u>Def</u>: un sottoinsieme $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ forma una <u>base</u> se:

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ e' un sistema di generatori
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti.

⚠ Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono una base, allora ogni vettore $v \in V$ <u>si scrive come combinazione lineare</u> dei $v_1, \dots, v_n$ in <u>maniera unica</u>, ovvero $\exists!$ $a_1, \dots, a_n \in K$ tali che $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$

esistono unici

Es: $\mathbb{R}^n$, $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← entrate tutte uguali a zero tranne l'i-esima

$\Rightarrow \{e_1, \ldots, e_n\}$ forma una base di $\mathbb{R}^n$.

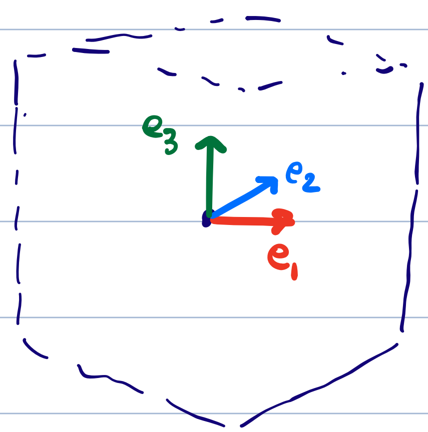
Infatti, sia $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

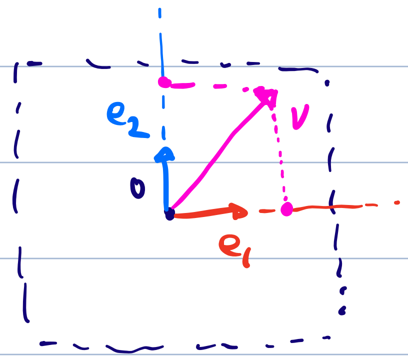
I coefficienti $x_1, \ldots, x_n$ sono gli unici che permettono di scrivere v come comb. lin. di $e_1, \ldots, e_n$. La base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ viene chiamata base canonica di $\mathbb{R}^n$, o base standard.

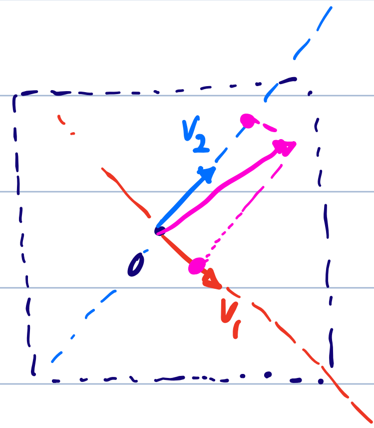
Geom:

$\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^2$





<u>Es</u>: $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$:

le coordinate rispetto a $\{e_1, e_2\}$ sono 3 e 5.

- $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 5e_2$

- $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 3 = a_1 + a_2 \\ 5 = a_1 - a_2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 3 = a_1 + a_2 = (5 + a_2) + a_2 = 5 + 2a_2 \\ a_1 = 5 + a_2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -2 = 3-5 = 2a_2 \Rightarrow -1 = a_2 \\ a_1 = 5 + a_2 = 5 - 1 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v = 4\, v_1 + (-1)\, v_2$$

le coordinate rispetto a $\{v_1, v_2\}$ sono 4 e -1

Prop: siano $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ basi di V. Allora $n = m$.

Def: se uno spazio vettoriale V ammette una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ allora diciamo che V ha dimensione n (notazione: $\dim(V) = n$).

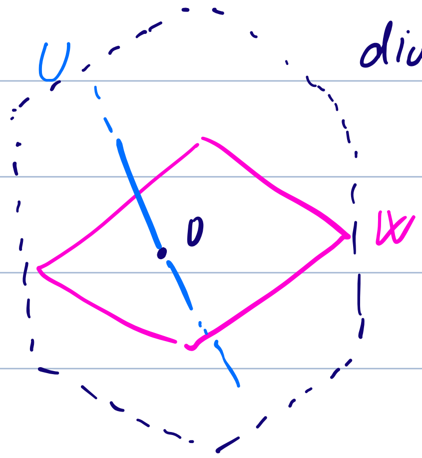
Prop: • se $U \subset V$ è un sottospazio, allora $\dim(U) \leq \dim(V)$.

• se $U, W \subset V$ sono sottospazi, allora

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Geometricamente:

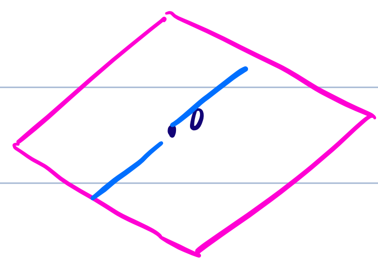
$\mathbb{R}^3$



$\dim(U+W)$
$= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$
$= 1 + 2 - 0 = 3$

$\Rightarrow U+W = \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$

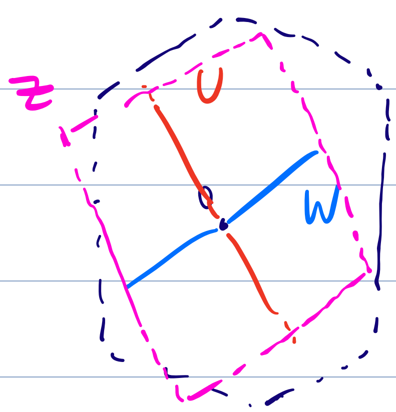


$\dim(U+W)$
$= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$
$= 1 + 2 - 1 = 2$

$U+W = W$

Quando $U, W \subset V$ tali che $U+W = V$
e $U \cap W = \{0\}$ diciamo che U e W sono
<u>in somma diretta</u> (notazione: $V = U \oplus W$)

$\mathbb{R}^3$



$\dim(U+W) = 1 + 1 - 0 = 2$

$U+W = Z$

<u>Non</u> e' vero che $V = U \oplus W$

Applicazioni lineari e matrici

Def: una funzione $f: V \longrightarrow W$ tra spazi vettoriali su K e' un'<u>applicazione lineare</u> se

- $f(0) = 0$.
- $f(v+w) = f(v) + f(w) \quad \forall v, w \in V$.
- $f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in K$.

Es: $V = \{ p(t)$ polinomi di grado $\leq 5 \}$
$W = \{ p(t)$ polinomi di grado $\leq 4 \}$

$$f: V \longrightarrow W, \qquad p(t) \longmapsto p'(t)$$

(derivata)

E' una funzione ben definita: se $\deg(p(t)) \leq 5$ allora $\deg(p'(t)) \leq 4$ (il grado si abbassa di 1).

- $f(0) = 0' = 0$
- $f(p+q) = (p+q)' = p' + q' = f(p) + f(q)$
- $f(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda \cdot (p') = \lambda \cdot f(p)$

Es: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ matrice 3×2

$$f_M : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto M \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

In generale, se $M \in Mat_{m \times n}(K)$ (matrice con m righe ed n colonne a coeff. in K) allora

$$f_M : K^n \longrightarrow K^m \qquad (K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto M \cdot v$$

Ricordiamo $M \cdot v = \left.\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n c_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{mj} x_j \end{pmatrix}\right\}$ m righe dove $$M = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

Tramite le applicazioni lineari possiamo anche definire nuovi sottospazi.

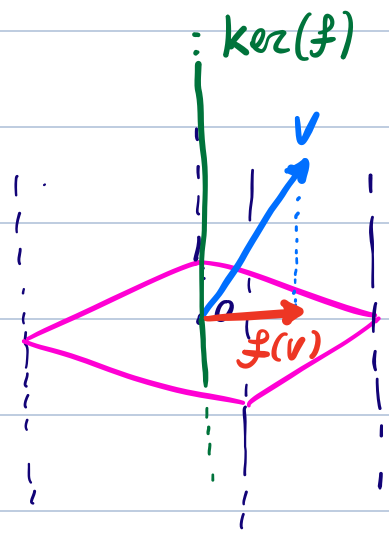
Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare.

<u>Def</u>: $$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in V \text{ t.c. } f(v) = 0 \}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \{ w \in W \text{ t.c. } \exists v,\ f(v) = w \}$$

<u>Es</u>: $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



$$\mathrm{Ker}(f) = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0 \}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$Im(f) = \mathbb{R}^2$ perché dato un qualsiasi vettore $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ riesco sempre a trovare $v \in \mathbb{R}^3$ tc $f(v) = w$, ad esempio $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Def: un'appl. lin. è iniettiva se $Ker(f) = \{0\}$
un'appl. lin. $f: V \to W$ è suriettiva se $Im(f) = W$.
un'appl. lin. è un isomorfismo se è ini e sur.

Prop: sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare.
Allora $\dim(V) = \dim(Im(f)) + \dim(Ker(f))$

Conseguenze: • se $\dim(Im(f)) < \dim(V)$
$\Rightarrow \dim(Ker(f)) > 0 \Rightarrow f$ non è iniettiva

• se f iniettiva $\Rightarrow \dim(Im(f)) \geq \dim(V)$

Prop: $\dim(Im(f)) \leq \dim(V)$

Quindi se f iniettiva $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$.

Se $f: V \to W$ è un isomorfismo, cioè ini e sur, cioè $\ker(f) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = W$ allora $\exists! g: W \to V$ tale che

$$g \circ f = id_V, \quad f \circ g = id_W$$

Chiamiamo g l'inversa di f (not.: $g = f^{-1}$)

Osserviamo che se f è isomorfismo $\Rightarrow \dim(V) = \dim(W)$.

Es: sia $M \in Mat_{n \times n}(K)$
$\Rightarrow f_M: K^n \to K^n$

Allora f_M è invertibile se e solo se la matrice M è invertibile se e solo se $\det(M) \neq 0$.

Ricordiamo che una matrice $M \in Mat_{n \times n}(K)$

si dice <u>invertibile</u> se $\exists N \in Mat_{n\times n}(K)$
tc $M \cdot N = Id = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

<u>Prop</u>: $M \in Mat_{n\times n}(K)$, $f_M : K^n \to K^n$
invertibile

$$\Rightarrow \quad (f_M)^{-1} = f_{(M^{-1})}$$

il <u>rango</u> di M è $\dim(Im(f_M))$.